Μέθοδος συγκερασμοῦ κλιμάκων - οἱ διατονικὲς κλίμακες τοῦ Διδύμου, τῆς Ἐπιτροπῆς, τοῦ Χρυσάνθου, καὶ οἱ συγκράσεις τους

τοῦ Δρ. Παναγιώτη Δ. Παπαδημητρίου

Διαβάζοντας διάφορα θεωρητικὰ βιβλία, παρατηροῦμε ὅτι ἀναφέρονται οἱ ἀποστάσεις τῶν χορδῶν μεταξύ τους μὲ κλασματικοὺς λόγους, ἀλλὰ καὶ μὲ ἀκέραια τμήματα/κόμματα (π.χ. 12, 10, 8, κτλ.). Ὅμως, γιὰ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ἀντιστοίχιση ἀπὸ τὰ πρῶτα στὰ δεύτερα (ἡ κοινῶς λεγομένη σύγκραση), δὲν ἔχουμε δεῖ νὰ γίνεται ἐπιστημονικὸς λόγος. Αὐτὸ τὸ κενὸ θὰ προσπαθήσουμε νὰ καλύψουμε σὲ αὐτὸ τὸ ἄρθρο μας.

Νὰ τονίσουμε ὅτι ἡ ἔρευνά μας βασίζεται στὸ γεγονὸς ὅτι ἡ "ἀληθινὴ" κλίμακα (ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα, κλίμακα) εἶναι αὐτὴ ποὺ δίνεται μὲ κλασματικοὺς λόγους, καὶ ὅτι οἱ κλίμακες μὲ τὰ τμήματα/κόμματα (ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα, συγκερασμένες κλίμακες), δὲν εἶναι παρὰ προσεγγίσεις τῆς κλίμακας.

Σὲ αὐτὸ τὸ ἄρθρο, θὰ περιοριστοῦμε μόνο στὴν διατονικὴ κλίμακα, καὶ θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὰ παρακάτω θέματα:

1. Ἡ διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου.
2. Ἡ διατονικὴ κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς, ὁ συγκερασμός της, καὶ σύγκριση μὲ τὴν διατονική κλίμακα τοῦ Διδύμου, καὶ τὴν διατονικὴ τοῦ Χρυσάνθου.
3. Μέθοδος συγκερασμοῦ τῶν κλιμάκων.
4. Κριτικὴ στὸν συγκερασμὸ τῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς, καὶ νέες συγκράσεις τῆς κλίμακάς της.
5. Συγκερασμοὶ τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου.
6. Συγκερασμοὶ τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Χρυσάνθου.
7. Συμπεράσματα.

1. Ἡ διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου.

Ἡ διατονικὴ κλίμακα ποὺ ἀποδέχονται τὰ περισσότερα θεωρητικά, εἶναι αὐτὴ τοῦ Διδύμου τοῦ Ἀλεξανδρέως, 1ος μ.Χ. αἰ. [Κηπουργός 1985, σ. 87] (ἐπίσης δὲς Δεβρελῆ, σ.

31):

Νη - 9/8 - Πα - 10/9 - Βου - 16/15 - Γα - 9/8 - Δι - 9/8 - Κε - 10/9 - Ζω - 16/15 - Νη',

καὶ σὲ σχετικὰ μήκη χορδῶν:

Νη	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη'
1	8/9	4/5	3/4	2/3	16/27	8/15	1/2

ὅπου:

- 9/8 = 3/2 : 4/3
- 10/9 = 5/4 : 9/8
- 16/15 = 4/3 : 5/4.

Γιὰ τὴν ἱστορία, "ὁ Πυθαγόρας πειραματιζόμενος ἀκουστικὰ στὸ μονόχορδο, βρῆκε τοὺς λόγους τῶν διαστημάτων τῆς ὀκτάβας (1/2 τοῦ μήκους τῆς χορδῆς), τῆς πέμπτης (2/3), καὶ τῆς τετάρτης (3/4)" [Κηπουργός]. Ἐπίσης, τὸ διάστημα μείζονος τρίτης 5/4, ἀποδίδεται στὸν Δίδυμο τὸν Ἀλεξανδρέα, κατὰ τὸν Κηπουργό.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν συχνότητα ἑνὸς φθόγγου (δεδομένης γιὰ παράδειγμα τῆς συχνότητας τοῦ Νη = φ), ἁπλὰ πολλαπλασιάζουμε τὸ φ μὲ τὸ ἀντίστροφο τοῦ σχετικοῦ μήκους τῆς χορδῆς τοῦ φθόγγου, π.χ.

συχνότητα Κε = φ * 27/16.

Τὴν παραπάνω διατονικὴ κλίμακα, ἀναφέρουν ἐπίσης καὶ τὰ ἑξῆς θεωρητικὰ βιβλία:

1. Βασίλειος Στεφανίδης (**1819**) *[δὲς Παγκρατίου Βατοπαιδινοῦ, σ. 40-41].*
2. Μιχαὴλ Α. Χατζηαθανασίου (1948), σ. 10, 20.
3. Ἀβραὰμ Χ. Εὐθυμιάδη (1997), σ. 66-67.
4. Σπ. Χ. Ψάχου (1997), σ. 173.
5. Νὰ σημειώσουμε ὅτι ὁ Ἀλυγιζάκης (2003), σ. 152, ἔχει τὸ Νη-Γα:
   Νη - 9/8 - Πα - 10/9 - Βου - 16/15 - Γα (ἐξάγεται εὔκολα ἀπὸ τοὺς λόγους τῶν παλμικῶν κινήσεων ποὺ δίνει), ἀλλὰ τὸ Δι-Κε τὸ δίνει 5/3 : 3/2 = 10/9 καὶ τὸ Κε-Ζω' 15/8 : 5/3 = 9/8. Δὲς ἐπίσης Μισαηλίδου, 1902, σ. 51, ποὺ λέει ὅτι τὸ Δι-Κε=10/9, καὶ Κε-Ζω'=9/8 εἶναι διαστήματα τῆς Εὐρωπαϊκῆς Μουσικῆς. Ἐπίσης εἶναι ἄτοπο νὰ δίνει τὸ Δι-Κε-Ζω' (σ.152) 12-10 τμήματα, καὶ σὲ κλασματικοὺς λόγους 10/9-9/8, καθότι 10/9 < 9/8 καὶ 12 > 10.
6. Ἐπίσης ὁ Μαυρουδῆς (1981), σ. 147, ἔχει τὸ Νη-Γα:
   Νη - 9/8 - Πα - 10/9 - Βου - 16/15 - Γα.

Πάντως νὰ ποῦμε ὅτι τόσα θεωρητικὰ βιβλία ὑπάρχουν, καὶ φαίνεται ὅτι δὲν τολμοῦν (ἐν γένει) οἱ συγγραφεῖς των νὰ καταπιαστοῦν μὲ τὴν κλίμακα, παρὰ δίνουν τὴν συγκερασμένη κλίμακα (συνήθως ἀντιγραφὴ ἐκ τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881), γιὰ τὴν ὁποῖαν διερωτῶμαι ποιοὶ ἔχουν ἀκούσει πῶς ἀκούγεται. Τὸ βασικότερο στοιχεῖο τῆς θεωρίας, ἡ κλίμακα (χωρὶς αὐτὴν τὶ θὰ ψάλλεις;), καὶ ὅμως ὑπάρχει κατὰ τὴν γνώμη μας μεγάλη ἄγνοια περὶ αὐτήν.

2. Ἡ διατονικὴ κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς, ὁ συγκερασμός της, καὶ σύγκριση μὲ τὴν διατονική κλίμακα τοῦ Διδύμου, καὶ τὴν διατονικὴ τοῦ Χρυσάνθου.

Ἡ Ἐπιτροπὴ τοῦ 1881, ἀναφέρει τοὺς λόγους τῶν διαστημάτων τῆς δικῆς της διατονικῆς (μὴ συγκερασμένης) κλίμακας (σ. 16, 14, τῆς "Στοιχειώδους διδασκαλίας"), κατὰ τὴν ὁποῖαν "ἀντικείμενον ἐπανειλημμένων δοκιμῶν ἐγένετο τὸ μῆκος τῆς χορδῆς διὰ τὸν φθόγγο Βου, ἡ μέση αὐτοῦ ἀξία εὑρέθη οὖσα 0,810 ἐπὶ χορδῆς ἑνὸς μέτρου":

Νη - 9/8 - Πα - 800/729 - Βου - 27/25 - Γα - 9/8 - Δι - 9/8 - Κε - 800/729 - Ζω - 27/25 - Νη',

καὶ σὲ σχετικὰ μήκη χορδῶν, [σ. 14 τοῦ ἐγχειριδίου τῆς Ἐπιτροπῆς]:

Νη	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη'
1	8/9	81/100	3/4	2/3	16/27	27/50	1/2

ἢ ἰσοδύναμα [εὐχαριστοῦμε τὸν ἱεροψάλτη Ἰωάννη Ἀρβανίτη γιὰ τὴν ὑπόδειξη]:

Νη	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη'
1	8/9	4/5*81/80	3/4	2/3	16/27	8/15*81/80	1/2

ὅπου:

- 81/80 = 9/8 : 10/9
- 800/729 = 9/8 * (80/81)^2 = 10/9 * 80/81
- 27/25 = 9/8 * 24/25 = 16/15 : 80/81
- 25/24 = 10/9 : 16/15.

Ἐπίσης, στὴν "Στοιχειώδη διδασκαλία..." τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881, διαβάζουμε (σ. 22): "[...] ἡ Ἐπιτροπὴ προὐτίμησε τὴν πειραματικὴν μέθοδον πάσης θεωρίας· προέβη δηλαδὴ εἰς τὴν σύγκρασιν κατὰ προσέγγισιν τῶν διαστημάτων τοῦ διαγράμματος, ἐπιβαλλομένην πάντοτε εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ὀργάνων χάριν τῆς εὐχρηστίας, [...]. Καὶ μετὰ πολλὰς δοκιμὰς εὗρεν ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ διαστήματος διαπασῶν εἰς 36 ἀκουστικὰ ἴσα διαστήματα ἐκφέρει τὰ ἡμέτερα ᾄσματα μετὰ προσεγγίσεως δυναμένης νὰ εὐχαριστήσῃ τὸν μᾶλλον μεμψίμοιρον ἱεροψάλτην· ἐκ τῶν 36 τούτων ἴσων ἀκουστικῶν βαθμίδων, ἃς ἀπεκάλεσε τμήματα, ἀποδώσασα ἓξ εἰς τὸν μείζονα, πέντε εἰς τὸν ἐλάσσονα, καὶ τέσσαρα εἰς τὸν ἐλάχιστον κετεσκεύασε τὸ Ψαλτήριον."

Δηλαδὴ τὰ διαστήματα τῆς Ἐπιτροπῆς γιὰ τὴν συγκερασμένη διατονικὴ κλίμακα, εἶναι (σ. 49 τῆς "Στοιχειώδους διδασκαλίας"):

Νη - 6 - Πα - 5 - Βου - 4 - Γα - 6 - Δι - 6 - Κε - 5 - Ζω - 4 - Νη'.

Ἐπίσης ἀναφέρει ἡ Ἐπιτροπή, σ. 23: "Ὑποδεικνύει ἐνταῦθα ἡ Ἐπιτροπὴ ὅτι διαίρεσις τοῦ διὰ πασῶν εἰς 72 ἴσα ἀκουστικὰ διαστήματα ἤθελεν ἐπιφέρει τελειοτέραν μεταξὺ θεωρίας καὶ πράξεως συμφωνίαν" (σημείωσε ὅτι αὐτὸ ποὺ λέει ἡ Ἐπιτροπὴ δὲν εἶναι ἀπαραίτητα σωστό γιὰ κάθε εἴδους κλίμακα).

Δηλ. τώρα τὰ διαστήματα θὰ εἶναι (πολλαπλασίασε ἐπὶ δύο, τὰ διαστήματα τῆς ἀνωτέρω κλίμακας):

Νη - 12 - Πα - 10 - Βου - 8 - Γα - 12 - Δι - 12 - Κε - 10 - Ζω - 8 - Νη'.

Σημειωτέον, ὅτι οἱ δύο προαναφερθεῖσες κλίμακες δίνουν τὶς ἴδιες συχνότητες, καὶ ὅτι τὴν παραπάνω συγκερασμένη κλίμακα χρησιμοποιοῦν τὰ περισσότερα (ἐξ ὅσων γνωρίζουμε) θεωρητικά (μερικὰ δίνουν ἐπιπλέον τῆς συγκερασμένης κλίμακας, καὶ κλίμακα μὲ λόγους), π.χ. τοῦ Ἀ.Χ. Εὐθυμιάδη, σ. 81, τοῦ Δ.Γ. Παναγιωτόπουλου, σ. 50, κ.ἄ.

Ὅπως λοιπὸν εἶπε ἡ ἴδια ἡ Ἐπιτροπή, "προὐτίμησε τὴν πειραματικὴν μέθοδον πάσης θεωρίας". Καὶ ἐπίσης ἔπραξε τὴν διαίρεση τῆς διαπασῶν σὲ 36 ἴσα τμήματα "οὐχὶ ὁδηγουμένη ὑπὸ τῆς προηγηθείσης θεωρίας, ἀλλ' ὑπὸ τῆς ὀξύτητος τῆς ἀκοῆς τῶν μελῶν αὐτῆς", καὶ "μετὰ πολλὰς δοκιμάς", καὶ "προέβη εἰς τὴν σύγκρασιν κατὰ προσέγγισιν".

Ἀξίζει νὰ ἀναφέρουμε τὴν παρατήρηση τοῦ ἀρχιμ. Παγκρατίου Βατοπεδινοῦ ἐπὶ τῇ βάσει ὄχι τῆς συγκερασμένης (36/72 κόμματα), ἀλλὰ αὐτῆς τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς (σ. 35): "Ἡ διαίρεσις αὕτη τῆς κλίμακος, ἢ μᾶλλον ὁ καθορισμὸς τοῦ μήκους τῆς χορδῆς ἑκάστου τόνου τῆς κλίμακος εἶνε μὲν ἀκουστικῶς ἀληθής, οὐχὶ ὅμως καὶ ἐπιστημονικῶς ἀκριβής· διότι δὲν ἐξήχθη ἀμέσως ἐκ μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν, ἀλλὰ κατηρτίσθη ἐπὶ τῇ βάσει δοκιμῶν. Πᾶν δὲ τὸ ἐπὶ τῇ βάσει δοκιμῶν γινόμενον δὲν δύναται νὰ ἦνε καὶ ἐπιστημονικῶς ἀκριβές, καὶ μάλιστα ἀντικείμενα ἀκοῆς· διότι ἐκεῖνο, ὅπερ ἐγὼ ἀντιλαμβάνομαι καὶ θεωρῶ διὰ τῆς ἀκοῆς μου ὡς ὀρθόν, μία ἄλλη ὀξυτέρα καὶ μᾶλλον εὐαίσθητος ἀκοὴ δύναται νὰ ἀποδείξῃ λελανθασμένον, καὶ δὲν δύναμαι νὰ ἀναιρέσω τὴν ἀντίληψιν καὶ γνώμην αὐτοῦ, διότι δὲν ἔχω ἐπιστημονικὴν μαθηματικὴν βάσιν, ἐφ' ἧς στηριζόμενος νὰ ἀποδείξω τὸ ἐναντίον".

Ἂς σημειωθεῖ ἐπίσης, ὅτι τότε δὲν εἶχαν ἀναλυτὲς φάσματος καὶ ὑπολογιστὲς γιὰ νὰ καταγράψουν ἀκριβέστατα τὶς κλίμακες ποὺ ἔψαλλε ὁ κάθε ψάλτης· συνεπῶς ἂν ἡ ἴδια δουλειὰ γινόταν τὴν σημερινὴ ἐποχή, εἶναι δυνατὸν τὰ ἀποτελέσματα νὰ διέφεραν.

Ἐπίσης, ὁ Χατζηαθανασίου (1948) γράφει γιὰ τὸν Βου τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς: "Τὸ δὲ σφάλμα τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ Οἰκουμενικοῦ Πατριαρχείου περὶ του ὕψους τοῦ τρίτου φθόγγου (Βου) καὶ τοῦ ἀναπαραγώγου αὐτοῦ (Ζω), προῆλθε - κατὰ τὴν ἡμετέραν ἀντίληψιν [-] ἐκ τοῦ ἐσφαλμένου συστήματος τὸ ὁποῖον εἶχεν αὕτη ὡς βάσιν πρὸς ἐξακρίβωσιν τοῦ σταθεροῦ ὕψους τῶν φθόγγων", καὶ ἀναφέρει τὸ χωρίον τῆς Ἐπιτροπῆς "Ἀντικείμενον ἐπανειλημμένων δοκιμῶν ἐγένετο τὸ μῆκος τῆς χορδῆς διὰ τὸν φθόγγον (Βου), ἡ μέση αὐτοῦ ἀξία εὑρέθη οὖσα (0,810) ἐπὶ χορδῆς ἑνὸς μέτρου", καὶ καταλήγει: "Ἐκ τῆς διατυπώσεως τοῦ χωρίου διαφαίνεται ὅτι τὸ ὕψος τοῦ φθόγγου (Βου) δὲν καθωρίσθη θετικῶς, ὅπως καὶ τῶν λοιπῶν φθόγγων, ἀλλὰ μᾶλλον κατὰ συμβιβασμόν. Ἐκ τούτου ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ληφθὲν βασικὸν σύστημα δὲν ἦτο τὸ ἐνδεδειγμένον. Τοιοῦτον δὲ εἶναι τὸ σύστημα τῶν δεσποζόντων φθόγγων καὶ τῶν ἀπηχημάτων. Ὁ φθόγγος (Βου) ἔχει τὸ ἐκφραστικώτερον ἀπήχημα πρὸς καθορισμὸν τοῦ φυσικοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὸ ὁποῖον οὐδεὶς νόμος δύναται νὰ κλονίσῃ. Ὁ φθόγγος (Βου) ἀποτελεῖ τὸν βασικὸν φθόγγον τοῦ ἤχου "λέγετος". Τὸ ἀπήχημα αὐτοῦ δὲν ἐκφράζεται ἐκ τοῦ βαρέος πρὸς τὸ ὀξύ, ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀξέος ἐπὶ τὸ βαρύ".

Παρακάτω συγκρίνουμε τὴν διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου, μὲ τὴν κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς καὶ τῆς συγκερασμένης αὐτῆς κλίμακα, καθὼς καὶ μὲ τὴν διατονικὴ τοῦ Χρυσάνθου [μέγα Θεωρητικόν, σ. 28], ἡ ὁποῖα ἔχει ὡς ἑξῆς:

Νη - 9/8 - Πα - 12/11 - Βου - 88/81 - Γα - 9/8 - Δι - 9/8 - Κε - 12/11 - Ζω - 88/81 - Νη',

καὶ σὲ σχετικὰ μήκη χορδῶν:

Νη	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη'
1	8/9	22/27	3/4	2/3	16/27	44/81	1/2

ἢ ἰσοδύναμα,

Νη	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη'
1	8/9	4/5*55/54	3/4	2/3	16/27	8/15*55/54	1/2

ὅπου ὑπολογίσαμε ὅτι:

- 55/54 = 10/9 : 12/11 (τὸ 12/11 φαίνεται ὅτι εἶναι διάστημα τοῦ Πτολεμαΐου [Δεβρελῆς, σ. 31]).

Ἡ σύγκριση τῶν προαναφερθέντων κλιμάκων (Διδύμου, Ἐπιτροπῆς, Χρυσάνθου) γίνεται στὸν Πίνακα 1, χρησιμοποιώντας ὡς ἀναφορὰ τὸν Νη, π.χ.

$$Νη = C = 440 * 2^{(-9/12)} = 261.6256 \text{ Hz.}$$

[Τὰ ἀρχεῖα ἤχων δίνονται μόνο γιὰ ἐξάσκηση (π.χ. γιὰ ἐπαλήθευση τοῦ ὕψους τοῦ φθόγγου ποὺ διαβάζετε στὴν Παραλλαγή), καὶ ὄχι γιὰ χρησιμοποίηση μέσα στοὺς Ἱεροὺς Ναούς. Οἱ ἦχοι ἔχουν παραχθεῖ μὲ ὑπολογιστὴ μὲ ὑπέρθεση ἁρμονικῶν.]

Πίνακας 1. Σύγκριση Διατονικῶν Κλιμάκων.

Διατονικὴ Διδύμου		Διατονικὴ Ἐπιτροπῆς 1881		Διατονικὴ Χρυσάνθου		Συγκερασμένη Διατονικὴ Ἐπιτροπῆς 1881	
Νη-Νη'		Νη-Νη'		Νη-Νη'		Νη-Νη'	
Νη'	523,2511	Νη'	523,2511	Νη'	523,2511	Νη'	523,2511
16/15		27/25		88/81		8	
Ζω'	490,5479	Ζω'	484,4918	Ζω'	481,6289	Ζω'	484,4650
10/9		800/729		12/11		10	
Κε	441,4931	Κε	441,4931	Κε	441,4931	Κε	440,0000
9/8		9/8		9/8		12	
Δι	392,4383	Δι	392,4383	Δι	392,4383	Δι	391,9954
9/8		9/8		9/8		12	
Γα	348,8341	Γα	348,8341	Γα	348,8341	Γα	349,2282
16/15		27/25		88/81		8	
Βου	327,0320	Βου	322,9945	Βου	321,0859	Βου	323,3416
10/9		800/729		12/11		10	
Πα	294,3288	Πα	294,3288	Πα	294,3288	Πα	293,6648
9/8		9/8		9/8		12	
Νη	261,6256	Νη	261,6256	Νη	261,6256	Νη	261,6256

[Σημ. Γιὰ σύγκριση καὶ ἄλλων διατονικῶν ἀρχαίων κλιμάκων, ὁ ἐνδιαφερόμενος παραπέμπεται στό: http://music.analogion.net/Klimakes/diatonikh_sugkrish2.html]

Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμε ὅτι ἡ διατονικὴ τοῦ Διδύμου, ἡ διατονικὴ τῆς Ἐπιτροπῆς, καὶ ἡ διατονικὴ τοῦ Χρυσάνθου, διαφέρουν μόνο κατὰ τοὺς φθόγγους Βου καὶ Ζω' (λόγῳ τοῦ ὁμοίου τετραχόρδου).

Ἐπίσης βλέπουμε ὅτι ἡ διατονικὴ τῆς Ἐπιτροπῆς, μὲ τὴν συγκερασμένη αὐτῆς, διαφέρουν περίπου 1-1.5Hz, ποὺ κατὰ τὴν γνώμη μας δὲν εἶναι πολύ (δὲν εἶναι ὅμως καὶ λίγο). Δηλαδὴ ὁ συγκερασμὸς τῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς σὲ 12-10-8 κτλ. (λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ἄθροισμα κομμάτων 72) εἶναι καλός.

Ὅμως, ἡ συγκερασμένη κλίμακα 12-10-8, ἔγινε μὲ βάση τὴν κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς, καὶ δὲν εἶναι σωστὸ ποὺ ἀρκετοὶ θεωρητικοὶ τὴν δίνουν καὶ ὡς συγκερασμένη τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου, ἀφοῦ βλέπουμε ὅτι διαφέρουν μέχρι καὶ 6Hz. Συνεπῶς ἀπαιτεῖται (ἀκριβέστερος) συγκερασμὸς τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου.

3. Μέθοδος συγκερασμοῦ τῶν κλιμάκων.

Ἐπειδὴ δὲν ἔχουμε δεῖ στὰ θεωρητικὰ βιβλία κάποια μέθοδο συγκερασμοῦ τῶν κλιμάκων σὲ ἀκέραια κόμματα (ἐκτὸς ἀπὸ τὸν Ἀλυγιζάκη, σ. 152, ὁ ὁποίος σκιαγραφεῖ σὲ λίγες γραμμὲς μιὰ μέθοδο χωρὶς ὅμως λεπτομέρειες), θὰ ἀναλύσουμε σὲ αὐτὴν τὴν ἑνότητα μιὰ ἐπιστημονικὴ μέθοδο.

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἕνα (ζ+1)-χορδο (τὸ ζ εἶναι ἀκέραιος), τοῦ ὁποῖου οἱ ἄκρες χορδές (π.χ. Ρ, Α), ἔχουν λόγο συχνοτήτων m>1,

$$\mathrm{A} - \lambda(1) - \mathrm{B} - \lambda(2) - \Gamma - \lambda(3) - \ldots\ldots - \lambda(\zeta) - \mathrm{P}$$

καὶ τὸ ὁποῖο μᾶς δίνεται μὲ τοὺς λόγους λ(1), ..., λ(ζ), ποὺ περικλείονται στὸ παρακάτω διάνυσμα,

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(\zeta)]'.$$

Αὐτὸ τὸ (ζ+1)-χορδο, θέλουμε ἐμεῖς νὰ τὸ συγκεράσουμε, δηλ. νὰ τὸ διαιρέσουμε σὲ Ν ἴσα ἀκουστικὰ τμήματα, καὶ νὰ πάρουμε τ(1), ..., τ(ζ),

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(\zeta)]' \ , \qquad \text{ἄθροισμα}[\boldsymbol{\tau}] = \mathrm{N},$$

ἔτσι ὥστε τὸ (ζ+1)-χορδο νὰ δίνεται κατὰ προσέγγιση ὡς

$$\mathrm{A} - \tau(1) - \mathrm{B} - \tau(2) - \Gamma - \tau(3) - \ldots\ldots - \tau(\zeta) - \mathrm{P}.$$

Οἱ ἀριθμοὶ τ μπορεῖ νὰ εἶναι ἀκέραιοι, ἀλλὰ καὶ νὰ ἔχουν παραπάνω ἀκρίβεια, π.χ. 0.5, 0.25, κ.ο.κ., ἀνάλογα μὲ τὴν προσέγγιση ποὺ θέλουμε νὰ κάνουμε.

Τὸ πρόβλημα τώρα εἶναι, πῶς θὰ προσεγγίσουμε (συγκεράσουμε) τὸ (ζ+1)-χορδο. Ἡ προσέγγιση μπορεῖ νὰ γίνει γιὰ εὐκολία, εἴτε ὡς

$$\mathrm{m}.\hat{}(\boldsymbol{\tau}/\mathrm{N}) \rightarrow \boldsymbol{\lambda} \qquad\qquad (\alpha)$$

εἴτε παίρνοντας τοὺς λογάριθμους, π.χ. μὲ βάση r (γιὰ κάποιο r), στὴν ἀνωτέρω σχέση ὡς

$$\mathrm{logr}[\mathrm{m}.\hat{}(\boldsymbol{\tau}/\mathrm{N})] \rightarrow \mathrm{logr}[\boldsymbol{\lambda}] \qquad\qquad (\beta).$$

Γιὰ τὴν προσέγγιση θὰ ἀκολουθήσουμε μεθόδους μοντελοποίησης (modelling of data). Φυσικά, ἂν δὲν περιορίσουμε τὰ **τ** νὰ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀλλὰ πραγματικοί (τὸ ὁποῖο κατὰ τὴν γνώμη μας δὲν ἔχει μεγάλη "πρακτικὴ" ἀξία, καθότι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ δὲν συγκρατοῦνται εὔκολα ἀπὸ τὴν μνήμη, ὅπως οἱ ἀκέραιοι), τότε ὁ ὑπολογισμός τους βγαίνει αὐτόματα ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέση (β), ἐξισώνοντας τὰ δύο μέρη:

$$\mathrm{logr}[\mathrm{m}.\hat{}(\boldsymbol{\tau}/\mathrm{N})] = \mathrm{logr}[\boldsymbol{\lambda}] \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathrm{N} * \mathrm{logm}[\boldsymbol{\lambda}].$$

Ι. Ἐλάχιστα τετράγωνα (least-squares fit)

Σύμφωνα μὲ τὴν μέθοδο ἐλαχίστων τετραγώνων θέλουμε νὰ βροῦμε τὸ διάνυσμα **τ**, ὥστε νὰ ἐλαχιστοποιεῖται τὸ ἄθροισμα [Numerical Recipes in C, 2nd ed., σ. 657]:

Φ = ἄθροισμα[(**λ** - m.^(**τ**/N)).^2]   *(α' μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων)*

Ἐπίσης θὰ μπορούσαμε νὰ χρησιμοποιήσουμε (ἀνάμεσα σὲ ἄλλες παραλλαγές) τὴν μέθοδο ἐλαχίστων τετραγώνων, προσεγγίζοντας τὸν λογάριθμο τῶν λόγων:

Φ = ἄθροισμα[(logr[**λ**] - logr[m.^(**τ**/N)]).^2]   *(β' μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων).*

Συνεπῶς ψάχνουμε γιὰ ὅλα τὰ διανύσματα **τ** (μὲ τὴν βοήθεια Η/Υ) ποὺ νὰ ἱκανοποιοῦν τοὺς παραπάνω περιορισμούς, καὶ ἐπιλέγουμε αὐτὸ τὸ διάνυσμα ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ παραπάνω ἄθροισμα Φ (ὡς συνάρτηση τοῦ N).

Παράδειγμα (προσέγγιση τῆς διατονικῆς κλίμακας)

Ἔστω ὅτι θέλουμε νὰ ὑπολογίσουμε τὰ τμήματα τῆς διατονικῆς κλίμακας (m=2):

Νη - τ(1) - Πα - τ(2) - Βου - τ(3) - Γα - τ(1) - Δι - τ(1) - Κε - τ(2) - Ζω - τ(3) - Νη'.

Γιὰ νὰ μειώσουμε τὴν πολυπλοκότητα τοῦ προβλήματος, θέτουμε ὅτι:

$$τ(1) >= τ(2) >= τ(3)$$

ἐπειδὴ ξέρουμε ὅτι τὸ ἕνα διάστημα εἶναι μεγαλύτερο τοῦ ἄλλου (τὴν ἰσότητα τὴν θέλουμε σὲ περίπτωση ποὺ τὸ N εἶναι μικρό). Ἀκόμη, ἐξ ὁρισμοῦ ἔχουμε (ἀπὸ τὴν παραπάνω διατονικὴ κλίμακα),

$$N = 3*τ(1) + 2*τ(2) + 2*τ(3).$$

Ἔστω **λ** = [λ(1), λ(2), λ(3)]', τὸ διάνυσμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στοὺς κλασματικοὺς λόγους τῆς κλίμακας· π.χ. γιὰ τὴν διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου (1ης στήλης τοῦ Πίνακα 1): λ(1)=9/8, λ(2)=10/9, λ(3)=16/15. Τότε σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω μεθοδολογία, ψάχνουμε νὰ βροῦμε τὸ διάνυσμα **τ** ὥστε νὰ μειώνεται τὸ παρακάτω ἄθροισμα Φ (α' ἢ β' μεθόδου):

Φ = ἄθροισμα[**a** .* (**λ** - m.^(**τ**/N)).^2]   *(α' μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων - Ια')*

Φ = ἄθροισμα[**a** .* (logr[**λ**] - logr[m.^(**τ**/N)]).^2]   *(β' μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων - Ιβ').*

ὅπου τὸ **a** χρησιμοποιεῖται, ἐπειδὴ ὁ μείζων τόνος τ(1) ἀπαντᾶται 3 φορές, ὁ ἐλάσσων τόνος τ(2) 2 φορές, καὶ τὸ μείζον ἡμιτόνιο τ(3) 2 φορές: **a** = [a(1), a(2), a(3)]' = [3, 2, 2]'.

ΙΙ. Ἄλλες μέθοδοι μοντελοποίησης

Ἄλλες μέθοδοι μοντελοποίησης μποροῦν ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθοῦν (Κεφ. 15ο τοῦ "Numerical Recipes"), ἀλλὰ δὲν θὰ ἀσχοληθοῦμε γιατὶ δὲν τὸ κρίνουμε σκόπιμο, ἀλλὰ μᾶλλον χρονοβόρο.

4. Κριτικὴ στὸν συγκερασμὸ τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς, καὶ νέες συγκράσεις τῆς κλίμακάς της.

Ἂς δοῦμε ὅμως τώρα, τὶς δέκα καλύτερες συγκράσεις τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881 μὲ τὴν μέθοδο Ια', θέτοντας (δὲς Πίνακα 1, 2η στήλη),

$$\lambda(1)=9/8,\ \lambda(2)=800/729,\ \lambda(3)=27/25,$$

καὶ περιορίζοντας τὰ τμήματα τ νὰ εἶναι μόνο ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Μὲ τὸν ὅρο καλύτερες συγκράσεις, ἐννοοῦμε ὅτι ψάχνουμε γιὰ τὰ Ν, γιὰ τὰ ὁποῖα π.χ. 7 <= Ν <= 100, καὶ βρίσκουμε π.χ. τὰ 10 καλύτερα, ἀπὸ τὴν ἄποψη ὅτι ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ (σημείωσε, ὅτι γιὰ κάθε Ν ψάχνουμε τὰ τ ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ). Τὰ ἀποτελέσματα δίνονται στὸν Πίνακα 2.

Πίνακας 2. Οἱ δέκα καλύτερες νέες συγκράσεις τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς 1881 (2η στήλη τοῦ Πίνακα 1), ὡς πρὸς τὴν ἐλαχιστοποίηση τοῦ Φ τῆς μεθόδου Ια', μὲ 7 <= Ν <= 100.

Ν	Φ	τ(1), τ(2), τ(3)
82	**3.01373816046678e-006**	**14, 11, 9**
89	6.13021147525972e-006	15, 12, 10
53	**9.98848833506265e-006**	**9, 7, 6**
99	1.47231503682198e-005	17, 13, 11
96	3.55652182052939e-005	16, 13, 11
65	3.56168171565722e-005	11, 9, 7
75	4.31753829000899e-005	13, 10, 8
94	4.49260117512112e-005	16, 13, 10
36	**4.61674171450643e-005**	**6, 5, 4**
72	**4.61674171450643e-005**	**12, 10, 8**

Δυστυχῶς βλέπουμε τὸ Ν = 36 (ἢ 72) ποὺ πρότεινε ἡ Ἐπιτροπή, ὄχι στὶς πρῶτες θέσεις (ἀπὸ ἄποψη ἀκρίβειας συγκερασμοῦ), ἀλλὰ στὴν 9η (βάσει τοῦ Ν<=100). Τὴν τρίτη θέση κατέχει τὸ Ν=53, ποὺ ἀποδίδεται στὸν Δανὸ Μερκάτορα (17ος αἰ.) ποὺ τὸ βρῆκε σὲ συγγράματα τοῦ Κινέζου Κίνγκ Φάνγκ (2ος π.Χ. αἰ.), καὶ τὸ ὁποῖο χρησιμοποιεῖ ἡ τουρκικὴ μουσική [Κηπουργός, σ. 90].

Πάντως βλέπουμε ὅτι τὸ N = 36, δίνει ὄντως **τ** = [6, 5, 4]', καὶ τὸ N = 72, δίνει (εὔκολα ἐξάγεται) **τ** = [12, 10, 8]', καὶ τὸ ἴδιο Φ, μὲ τὴν περίπτωση N=36.

Ἐπομένως,

1. ἡ σύγκραση τῆς Ἐπιτροπῆς ἐλαχιστοποιεῖ τὸ Φ συναρτήσει τοῦ N = 36 (72), ὅμως...
2. ἂν ἀφήσουμε τὸ N νὰ παίρνει τιμές 7<=N<=100, τότε βρίσκουμε ὅτι τὸ N=82 δίνει μεγαλύτερη ἀκρίβεια συγκερασμοῦ ἀπὸ τὸ N=36(72), ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ N=53.

Μᾶς ἀπασχόλησε τὸ ἐρώτημα, πῶς ἔφθασε ἡ Ἐπιτροπὴ στὸν ἀριθμὸ N=36, καὶ ὄχι σὲ κάποιον ἄλλον. Μιὰ πιθανὴ ἀπάντηση εἶναι ἡ ἑξῆς: παρατήρησε ὅτι στὸν Πίνακα 2, πάνω ἀπὸ τὸ N=36, δὲν ὑπάρχει N μικρότερο τοῦ 53. Ὁπότε ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ Ἐπιτροπὴ περιόρισε π.χ. τὰ N νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ 53 ἢ ἄλλου ἀριθμοῦ μικρότερου τοῦ 53 (τότε δὲν εἶχαν Η/Υ γιὰ νὰ κάνουν τοὺς ὑπολογισμοὺς σὲ δευτερόλεπτα, ὁπότε θὰ κοιτοῦσαν νὰ μείνουν σὲ μικρὲς τιμὲς τοῦ N), τότε ὄντως τὸ N=36 δίνει τὸν ἀκριβέστερο συγκερασμό!

Ἂς συγκρίνουμε ὅμως καὶ τὶς συχνότητες (δὲς Πίνακα 3), καὶ τὰ σέντς (δὲς Πίνακα 4), τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς, τῆς συγκερασμένης κατὰ τὴν ἐπιτροπή, καὶ τῆς συγκερασμένης μὲ τὴν μέθοδό μας ἔχοντας N=82.

Πίνακας 3. Σύγκριση ὡς πρὸς τὶς συχνότητες, τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς 1881 (2η στήλη, Πίνακας 1), μὲ τὶς συγκερασμένες κλίμακες τοῦ N = 36 (N = 72 δίνει ἴδια, ἀλλὰ τὴν ἀναφέρουμε), καὶ N = 82 (ποὺ δίνει τὸ ἐλάχιστο Φ, γιὰ 7 <= N <= 100, μὲ τὴν μέθοδο Ια').

Ἐπιτροπὴ 1881 μὲ λόγους	**Σύγκραση N = 36**	**Σύγκραση N = 72**	**Σύγκραση N = 82**
Νη' 523,2511	**Νη'** 523,2511	**Νη'** 523,2511	**Νη'** 523,2511
27/25	4	8	9
Ζω' 484,4918	**Ζω'** 484,4650	**Ζω'** 484,4650	**Ζω'** 484,9202
800/729	5	10	11
Κε 441,4931	**Κε** 440,0000	**Κε** 440,0000	**Κε** 441,8636
9/8	6	12	14
Δι 392,4383	**Δι** 391,9954	**Δι** 391,9954	**Δι** 392,5481
9/8	6	12	14
Γα 348,8341	**Γα** 349,2282	**Γα** 349,2282	**Γα** 348,7366
27/25	4	8	9
Βου 322,9945	**Βου** 323,3416	**Βου** 323,3416	**Βου** 323,1898
800/729	5	10	11
Πα 294,3288	**Πα** 293,6648	**Πα** 293,6648	**Πα** 294,4934

9/8 Νη 261,6256	6 Νη 261,6256	12 Νη 261,6256	14 Νη 261,6256

Ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ μία ὀκτάβα ἔχει 1200 σέντς, τὰ σέντς **c** μὲ βάση τὰ κόμματα/τμήματα **τ** (Ν) δίνονται ἀπὸ τὴν σχέση,

$$c = \tau*1200/N,$$

ὅπου **τ** τὰ τμήματα τῶν συγκερασμένων κλιμάκων. Σὲ σχέση μὲ τοὺς λόγους **λ**, τὰ σέντς **c** δίνονται ἀπὸ τὴν σχέση

$$c = 1200*\log 2(\lambda).$$

Πίνακας 4. Σύγκριση ὡς πρὸς τὰ σέντς, τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς 1881 (2η στήλη, Πίνακας 1), μὲ τὶς συγκερασμένες κλίμακες τοῦ Ν = 36 (Ν = 72 δίνει ἴδια, ἀλλὰ τὴν ἀναφέρουμε), καὶ Ν = 82 (ποὺ δίνει τὸ ἐλάχιστο Φ, γιὰ 7 <= Ν <= 100, μὲ τὴν μέθοδο Ια').

Ἐπιτροπὴ 1881 μὲ λόγους	Σύγκραση Ν = 36	Σύγκραση Ν = 72	Σύγκραση Ν = 82
Νη'	**Νη'**	**Νη'**	**Νη'**
27/25 133.2376	4 133.3333	8 133.3333	9 131.7073
Ζω'	**Ζω'**	**Ζω'**	**Ζω'**
800/729 160.8974	5 166.6667	10 166.6667	11 160.9756
Κε	**Κε**	**Κε**	**Κε**
9/8 203.9100	6 200	12 200	14 204.8780
Δι	**Δι**	**Δι**	**Δι**
9/8 203.9100	6 200	12 200	14 204.8780
Γα	**Γα**	**Γα**	**Γα**
27/25 133.2376	4 133.3333	8 133.3333	9 131.7073
Βου	**Βου**	**Βου**	**Βου**
800/729 160.8974	5 166.6667	10 166.6667	11 160.9756
Πα	**Πα**	**Πα**	**Πα**
9/8 203.9100	6 200	12 200	14 204.8780
Νη	**Νη**	**Νη**	**Νη**

Παρατηροῦμε, ὅτι ὄντως ἡ διαίρεση τῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς 1881, σὲ **82 τμήματα** εἶναι ἀκριβέστερη αὐτῆς τῆς διαίρεσης τῆς ἴδιας τῆς Ἐπιτροπῆς σὲ 36 (72).

Ἂς προχωρήσουμε ὅμως λίγο παραπάνω, καὶ ἂς ἐπιτρέψουμε στὰ τ νὰ παίρνουν καὶ τιμὲς +1/2. Τότε, γιὰ τὸ χωρισμό N=72, βρίσκουμε ὅτι τὸ Φ ἐλαχιστοποιεῖται καὶ πάλι ἀπὸ τὰ τμήματα 12-10-8 (Φ=4.6167e-5).

Ἂν ὅμως ἐπιτρέψουμε στὰ τ νὰ παίρνουν (ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀκέραιες) καὶ τιμὲς +1/4, +1/2, +3/4, τότε, γιὰ τὸν χωρισμό N=72, βρίσκουμε ὅτι τὸ Φ ἐλαχιστοποιεῖται ἀπὸ τὰ τμήματα (Φ=3.5565e-005),

12, 9+3/4, 8+1/4.

Ἐπίσης, γιὰ καθαρὰ ἐρευνητικοὺς λόγους, αὐξήσαμε τὸ πεδίο τοῦ N, καὶ τὰ ἀποτελέσματα ἔχουν ὡς ἑξῆς (μέθοδος Ια'):

- Γιὰ 7<=N<=300, ἡ καλύτερη σύγκραση εἶναι: N=253, **τ**=[43, 34, 28]', Φ=2.5551e-007.
- Γιὰ N=300, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[50, 41, 34]', Φ=3.3022e-005.
- Γιὰ 7<=N<=1200, ἡ καλύτερη σύγκραση εἶναι: N=1171, **τ**=[199, 157, 130]', Φ=7.4712e-010.
- Γιὰ N=1200, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[204, 161, 133]', Φ=6.2642e-008.

5. Συγκερασμοὶ τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου.

Εἴδαμε λοιπόν, ὅτι ὁ συγκερασμὸς τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Ἐπιτροπῆς σὲ 36 τμήματα, εἶναι ἀκριβὴς μόνο ἂν θεωρήσουμε N<53, καὶ ἐπίσης δεδομένων τῶν 36 τμημάτων, ἡ ἀντιστοίχηση 6-5-4 (ἢ 12-10-8 στὰ 72 τμήματα) στοὺς μείζονες, ἐλάσσονες τόνους καὶ τὰ μείζονα ἡμιτόνια, εἶναι ἀκριβής.

Ὅμως ὅπως εἴδαμε, τὰ περισσότερα θεωρητικὰ ἔχουν ἀπορρίψει τοὺς λόγους τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881, καὶ χρησιμοποιοῦν τὴν κλίμακα τοῦ Διδύμου (Πίνακας 1, 1η στήλη). Τὸ περίεργο εἶναι, ὅτι ὑπάρχουν θεωρητικοί, ποὺ δίνουν τὴν διατονικὴ κλίμακα ὄχι μὲ τοὺς λόγους τῆς Ἐπιτροπῆς, ἀλλὰ μὲ τοὺς λόγους τοῦ Διδύμου, καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη χρησιμοποιοῦν τὴν συγκερασμένη κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς ὡς συγκερασμένη τῆς τοῦ Διδύμου, πράγμα ἄτοπο!

Γιὰ αὐτὸ τὸν λόγο θὰ κοιτάξουμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν μεθοδολογία μας, πρὸς νέους συγκερασμοὺς τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου, θέτοντας

$\lambda(1)=9/8$, $\lambda(2)=10/9$, $\lambda(3)=16/15$,

καὶ περιορίζοντας τὰ τμήματα τ νὰ εἶναι μόνο ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ψάξαμε λοιπὸν γιὰ τὰ N, γιὰ τὰ ὁποῖα 7 <= N <= 100, καὶ βρήκαμε ὅτι τὰ δέκα καλύτερα (μαζὶ μὲ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τ), ἀπὸ τὴν ἄποψη ὅτι ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ, εἶναι τὰ ἑξῆς (Πίνακας 5).

Πίνακας 5. Οἱ δέκα καλύτερες νέες συγκράσεις τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου (1η στήλη Πίνακα 1), ὡς πρὸς τὴν ἐλαχιστοποίηση τοῦ Φ, μὲ 7 <= N <= 100, μὲ τὴν μέθοδο Ια'.

N	Φ	τ(1), τ(2), τ(3)
53	3.01081300495614e-006	9, 8, 5
65	5.61596668751314e-006	11, 10, 6
99	1.14338002158524e-005	17, 15, 9
94	1.88922812655824e-005	16, 14, 9
87	2.06461830014252e-005	15, 13, 8
77	2.50150850725453e-005	13, 12, 7
84	3.33312886478380e-005	14, 13, 8
72	**3.85821541181480e-005**	**12, 11, 7**
96	4.12319674248088e-005	16, 15, 9
89	4.82716373305650e-005	15, 14, 8

Ἀπὸ τὸ παραπάνω βλέπουμε ὅτι ἂν θεωρήσουμε ὅτι διαιροῦμε τὴν διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου σὲ 72 τμήματα, τότε τὰ τμήματα ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ δὲν εἶναι τὰ ***12-10-8*** (τὰ ὁποῖα ἦσαν γιὰ τὴν κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς τοῦ 1881, δὲς Πίνακα 2), ἀλλὰ τὰ **12-11-7**!

Ἂς προχωρήσουμε ὅμως λίγο παραπάνω, ὅπως καὶ στὴν προηγούμενη ἐνότητα, καὶ ἂς ἐπιτρέψουμε στὰ τ νὰ παίρνουν καὶ τιμὲς +1/4, +1/2, +3/4 (ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς), τότε, γιὰ τὸν χωρισμό N=72, βρίσκουμε ὅτι τὸ Φ ἐλαχιστοποιεῖται καὶ πάλι ἀπὸ τὰ τμήματα 12-11-7 (Φ=3.8582e-5).

Ἂν ἐπιτρέψουμε στὰ τ νὰ παίρνουν καὶ τιμὲς +1/5, +2/5, +3/5, +4/5, τότε, γιὰ τὸν χωρισμό N=72, βρίσκουμε ὅτι τὸ Φ ἐλαχιστοποιεῖται ἀπὸ τὰ τμήματα (Φ=1.6669e-5)

12+2/5, 10+4/5, 6+3/5.

Ἁπλῶς νὰ ἀναφέρουμε, ὅτι πρῶτος (κατὰ τὶς γνώσεις μας) ὁ Μισαηλίδης (1902), π.χ. σ. 53, 82, ἀναφέρει τὴν διατονικὴ κλίμακα στὰ 12-11-7 τμήματα (σύνολο 72) - περισσότερες λεπτομέρειες δὲν μποροῦμε νὰ δώσουμε, καθότι δὲν ἔχουμε ὅλο τὸ βιβλίο του, παρὰ φωτογραφίες ποὺ βγάλαμε ἀπὸ τὸ βιβλίο ποὺ τὸ βρήκαμε στὴν Ἐθνικὴ Βιβλιοθήκη τῆς Ἑλλάδος.

Πάντως παρατηροῦμε ὅτι στὸν συγκερασμὸ τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου (Πίνακας 5), τὸ N=53 δίνει τὸν ἀκριβέστερο συγκερασμὸ γιὰ N<=100. Ἂν ὅμως μεγαλώσουμε τὸ πεδίο τοῦ N, καὶ θέσουμε π.χ. N<=300, τότε τὰ ἀποτελέσματα διαφέρουν.

Γιὰ παράδειγμα, ψάξαμε γιὰ τὰ N, γιὰ τὰ ὁποῖα 7 <= N <= 300, καὶ βρήκαμε ὅτι τὰ δέκα καλύτερα, ἀπὸ τὴν ἄποψη ὅτι ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ (μέθοδος Ια'), εἶναι τὰ ἑξῆς (Πίνακας 6).

Πίνακας 6. Οἱ δέκα καλύτερες νέες συγκράσεις τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου (1η στήλη Πίνακα 1), ὡς πρὸς τὴν ἐλαχιστοποίηση τοῦ Φ, μὲ 7 <= N <= 300, μὲ τὴν μέθοδο Ια'.

N	Φ	τ(1), τ(2), τ(3)
171	4.35410724480881e-007	29, 26, 16
289	4.37391822918611e-007	49, 44, 27
224	6.50085998228181e-007	38, 34, 21
270	6.80993909312701e-007	46, 41, 25
118	**7.01258900472729e-007**	**20, 18, 11**
236	7.01258900472729e-007	40, 36, 22
277	9.04772557709026e-007	47, 42, 26
282	1.32999351759810e-006	48, 43, 26
258	1.54147207969269e-006	44, 39, 24
217	1.59650783083671e-006	37, 33, 20

Στὸν Πίνακα 7 ἔχουμε τὴν σύγκριση (ὡς πρὸς τὶς συχνότητες) τῆς διατονικῆς τοῦ Διδύμου, μὲ τὶς ἀντίστοιχες συγκερασμένες χρησιμοποιώντας N=72 (12-11-7), N=53 (9-8-5), καὶ N=118 (20-18-11). Ἡ σύγκριση μὲ N=72 (12-10-8) ὑπάρχει ἤδη στὸν Πίνακα 1.

Πίνακας 7. Σύγκριση ὡς πρὸς τὶς συχνότητες, τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου (1η στήλη, Πίνακας 1), μὲ τὶς συγκερασμένες κλίμακες τοῦ N=72 (12-11-7), N=53 (9-8-5), καὶ N=118 (20-18-11).

Διατονική Διδύμου μὲ λόγους		Διατονική Διδύμου N=72		Διατονική Διδύμου N=53		Διατονική Διδύμου N=118	
Νη'	523,2511	**Νη'**	523,2511	**Νη'**	523,2511	**Νη'**	523,2511
16/15		7		5		11	
Ζω'	490,5479	**Ζω'**	489,1515	**Ζω'**	490,1298	**Ζω'**	490,5102
10/9		11		8		18	
Κε	441,4931	**Κε**	440,0000	**Κε**	441,4410	**Κε**	441,2942
9/8		12		9		20	
Δι	392,4383	**Δι**	391,9954	**Δι**	392,4229	**Δι**	392,3794
9/8		12		9		20	
Γα	348,8341	**Γα**	349,2282	**Γα**	348,8478	**Γα**	348,8865
16/15		7		5		11	
Βου	327,0320	**Βου**	326,4694	**Βου**	326,7661	**Βου**	327,0559
10/9		11		8		18	

Πα	294,3288	**Πα**	293,6648	**Πα**	294,3056	**Πα**	294,2403
9/8		12		9		20	
Νη	261,6256	**Νη**	261,6256	**Νη**	261,6256	**Νη**	261,6256

Ἀπὸ τὴν παραπάνω σύγκριση παρατηροῦμε ὅτι τὸ N=118, ἢ 53 δίνει μεγαλύτερη ἀκρίβεια ἀπὸ τὸ N=72, ἀλλὰ ἡ μεταξύ τους σύγκριση εἶναι δύσκολη, καθότι ἡ διαφορὰ στὸ Φ εἶναι μικρή (δὲς Πίνακες 5, 6).

Ἐπίσης καὶ γιὰ τὴν κλίμακα τοῦ Διδύμου, αὐξήσαμε τὸ πεδίο τοῦ N, καὶ τὰ ἀποτελέσματα ἔχουν ὡς ἑξῆς (μέθοδος Ια'):

- Γιὰ N=300, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[50, 46, 29]', Φ=3.5294e-005.
- Γιὰ 7<=N<=1200, ἡ καλύτερη σύγκραση εἶναι: N=1171, **τ**=[199, 178, 109]', Φ=1.211e-009.
- Γιὰ N=1200, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[204, 182, 112]', Φ=1.9933e-007.

6. Συγκερασμοὶ τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Χρυσάνθου

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο, θὰ ἐφαρμόσουμε καὶ πάλι τὴν μέθοδό μας, αὐτὴν τὴν φορὰ γιὰ τὴν διατονικὴ κλίμακα τοῦ Χρυσάνθου (Παρ. 2, καὶ Πίνακας 1, 3η στήλη), θέτοντας

$$\lambda(1)=9/8,\ \lambda(2)=12/11,\ \lambda(3)=88/81,$$

καὶ περιορίζοντας τὰ τμήματα τ νὰ εἶναι μόνο ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ψάξαμε λοιπὸν καὶ σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωση γιὰ τὰ N, γιὰ τὰ ὁποῖα 7 <= N <= 100, καὶ βρήκαμε ὅτι τὰ δέκα καλύτερα (μαζὶ μὲ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τ), ἀπὸ τὴν ἄποψη ὅτι ἐλαχιστοποιοῦν τὸ Φ, εἶναι τὰ ἑξῆς (Πίνακας 8).

Πίνακας 8. Οἱ δέκα καλύτερες νέες συγκράσεις τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Χρυσάνθου, ὡς πρὸς τὴν ἐλαχιστοποίηση τοῦ Φ, μὲ 7 <= N <= 100, μὲ τὴν μέθοδο Ια'.

N	Φ	τ(1), τ(2), τ(3)
94	1.27622336868680e-005	16, 12, 11
65	2.16433874678844e-005	11, 8, 8
41	2.21838733097379e-005	7, 5, 5
82	2.21838733097379e-005	14, 10, 10
89	2.61007853029048e-005	15, 11, 11
99	3.01506404409891e-005	17, 12, 12

77	3.20214146056612e-005	13, 10, 9
87	3.65881080828087e-005	15, 11, 10
58	3.94247689250045e-005	10, 7, 7
70	4.64156885356665e-005	12, 9, 8

Ἀν θέσουμε N=68, τότε βρίσκουμε τὸν ἀκόλουθο συγκερασμό (ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ Φ):

τ = [12, 8, 8]', μὲ Φ=1.534429226890763e-004,

καὶ ἂν ἀφήσουμε τὰ τμήματα τ νὰ παίρνουν καὶ τιμὲς +1/3, +2/3, τότε

τ = [12, 8+1/3, 7+2/3]', μὲ Φ=1.414187497358495e-004.

Ἐπίσης ἂν θέσουμε N=72, βρίσκουμε:

τ = [12, 9, 9]', μὲ Φ=5.306892730564770e-005,

καὶ ἂν ἀφήσουμε τὰ τμήματα τ νὰ παίρνουν καὶ τιμὲς +1/3, +2/3, τότε

τ = [12, 9+1/3, 8+2/3]', μὲ Φ=3.929571600311490e-005.

Τέλος, αὐξήσαμε τὸ πεδίο τοῦ N, καὶ τὰ ἀποτελέσματα ἔχουν ὡς ἑξῆς (μέθοδος Ια'):

- Γιὰ 7<=N<=300, ἡ καλύτερη σύγκραση εἶναι: N=159, **τ**=[27, 20, 19]', Φ=1.0626e-007.
- Γιὰ N=300, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[52, 37, 35]', Φ=3.6373e-005.
- Γιὰ 7<=N<=1200, ἡ καλύτερη σύγκραση εἶναι: N=1171, **τ**=[199, 147, 140]', Φ=1.1799e-009.
- Γιὰ N=1200, ἡ σύγκραση εἶναι: **τ**=[204, 151, 143]', Φ=3.1012e-007.

7. Συμπεράσματα

1. Ὁ συγκερασμὸς τῆς διατονικῆς κλίμακας τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς σὲ 36 τμήματα, εἶναι ἀκριβὴς ἂν θεωρήσουμε ὅτι N<53 (μᾶλλον κατόρθωμα γιὰ τὴν ἐποχὴ ἐκείνη), καὶ δὲν εἶναι ἀκριβὴς ἂν π.χ. θεωρήσουμε N<=100.
2. Δεδομένης τῆς διαίρεσης τῆς κλίμακας τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς σὲ 36 (72) τμήματα, ὁ συγκερασμὸς 6-5-4 (ἢ 12-10-8) εἶναι ἀκριβής (γιὰ τὴν διατονικὴ κλίμακα τῆς Ἐπιτροπῆς).
3. Εἶναι λανθασμένη ἡ χρησιμοποίηση τῆς συγκερασμένης κλίμακας τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς (δηλ. 12-10-8), ὡς συγκερασμένης τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου (ἡ ὁποῖα ἔχει διαφορετικοὺς λόγους ἀπὸ αὐτὴν τῆς Ἐπιτροπῆς). Συνεπῶς τὰ θεωρητικὰ βιβλία ποὺ δίνουν τοὺς λόγους τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου, καὶ παράλληλα τὰ τμήματα τῆς Μουσικῆς Ἐπιτροπῆς

αὐτοδιαψεύδονται.

4. Ὁ ἀκριβέστερος (σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία μας) συγκερασμὸς τῆς διατονικῆς κλίμακας τοῦ Διδύμου γιὰ N<=300, εἶναι 29-26-16 μὲ N=171. Ἐνδεικτικά, γιὰ μικρότερο N, τὸ N=118, δηλ. 20-18-11, δίνει ἀκρίβεια καλύτερη ἀπὸ τὸ N=53 (9-8-5).
5. Ἂν ὅμως δὲν μᾶς νοιάζει ἡ ἀκρίβεια καὶ ἐπιμένουμε στὴν ἐπιλογὴ N=72 (γιὰ λόγους π.χ. ψαλτικοῦ κατεστημένου), τότε τὰ τμήματα εἶναι 12-11-7 γιὰ τὴν διατονικὴ κλίμακα τοῦ Διδύμου.
6. Μεγαλώνοντας τὸ N (τὸν ἀριθμὸ τῶν κομμάτων τῆς συγκερασμένης κλίμακας), δὲν μικραίνει ἀπαραίτητα τὸ Φ, δηλ. δὲν ἔχουμε ἀπαραίτητα καλύτερη προσέγγιση.
7. Ἡ καλύτερη σύγκραση (πάντα σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία μας) καὶ τῶν τριῶν διατονικῶν κλιμάκων (Διδύμου, Ἐπιτροπῆς, Χρυσάνθου) γιὰ N<=1200, δίνεται ἀπὸ τὸ N=1171.
8. Τέλος, στὸ παρὸν ἄρθρο, ἀσχοληθήκαμε μὲ μεθόδους συγκερασμοῦ τῶν κλιμάκων (εὑρέσεως τοῦ συνόλου τῶν τμημάτων N, καθὼς καὶ αὐτῶν τῶν τμημάτων **τ**), καὶ βρήκαμε τοὺς καλύτερους συγκερασμούς τῶν διατονικῶν κλιμάκων, σύμφωνα μὲ τὴν μεθοδολογία μας.
9. Ὁ καλύτερος ταυτόχρονος συγκερασμὸς περισσοτέρων τῆς μιᾶς κλιμάκων, μπορεῖ νὰ γίνει π.χ. δημιουργῶντας μιὰ "ὑπέρ-κλίμακα" ἀποτελουμένη ἀπὸ τὶς ἐπὶ μέρους κλίμακες (ὁπότε m = 2*κ, ὅπου κ ὁ ἀριθμὸς τῶν κλιμάκων τῆς "ὑπέρ-κλίμακας"), καὶ ἐφαρμόζοντας τὴν μεθοδολογία μας. Ἀλλὰ αὐτὸ θὰ εἶναι τὸ θέμα μελλοντικοῦ μας ἄρθρου, ὅπως ἐπίσης καὶ οἱ συγκερασμοὶ ἀρκετῶν ἄλλων ἐπὶ μέρους κλιμάκων (μὴ διατονικῶν).
10. Τέλος, ὅσον ἀφορᾶ τὶς διατονικὲς κλίμακες τῆς Ἐπιτροπῆς καὶ τοῦ Χρυσάνθου, φαίνεται ὅτι μοιάζουν τῆς τοῦ Διδύμου, μὲ τὴν ἑξῆς διαφορά: ἡ Ἐπιτροπὴ ἔχει αὐξημένο τὸ σχετικὸ μῆκος τοῦ Βου κατὰ 81/80, καὶ ὁ Χρύσανθος κατὰ 55/54 (ὁ Ζω' ὁμοίως λόγῳ τοῦ ὁμοίου τετραχόρδου). Σύμφωνα μὲ τὶς μέχρι τώρα γνώσεις μας, Βου σὰν τοῦ Χρυσάνθου καὶ τῆς Ἐπιτροπῆς δὲν ἀπαντᾶται στὴν πρὸ-Χρυσάνθου βιβλιογραφία. Φαίνεται μὲ τὰ μέχρι τώρα δεδομένα, ὅτι οἱ πρὸ Χρυσάνθου χρησιμοποιούσαν τὴν διατονικὴ τοῦ Διδύμου [Κηπουργός, σ. 88].

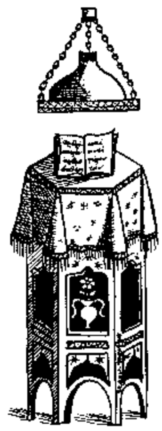
8. Ἀναφορές (κατ' ἀλφάβητον)

1. Ἀντωνίου Ε. Ἀλυγιζάκη, Θέματα Ἐκκλησιαστικῆς Μουσικῆς, ἐκδ. Π. Πουρνάρα, Θεσσαλονίκη 2003.
2. Ἀστερίου Κ. Δεβρελῆ, Πηδάλιον Βυζαντινῆς Μουσικῆς - Μέθοδος, Θεσσαλονίκη 1989.
3. Ἀβραὰμ Χ. Εὐθυμιάδη, Μαθήματα Βυζαντινῆς Ἐκκλησιαστικῆς Μουσικῆς, ἔκδ. Δ', Θεσσαλονίκη 1997.
4. Νίκου Κηπουργοῦ, Μερικὲς παρατηρήσεις πάνω στὰ βασικὰ διαστήματα τῆς

ἑλληνικῆς καὶ ἀνατολικῆς μουσικῆς, περιοδ. Μουσικολογία, τ. 2, Μάϊος 1985, σ. 83-93.

5. Περικλῆ Φ. Μαυρουδῆ, Ἡ Τέχνη τῆς Βυζαντινῆς καὶ Δημοτικῆς Μουσικῆς μὲ ἀσκήσεις, Β' ἔκδοση, Καβάλα 1981 [Εθν. Βιβλ. Ἑλλάδος, ΚΑΛΛ. 471].
6. Μισαὴλ Μισαηλίδου, Νέον Θεωρητικὸν Συντομώτατον ἤτοι περὶ τῆς καθ' ἡμᾶς ἐκκλησιαστικῆς καὶ ἀρχαῖας ἑλληνικῆς μουσικῆς, ἐν Ἀθήναις 1902 [Εθν. Βιβλ. Ἑλλάδος, Μοτσενίγειον ἱστορικὸν ἀρχεῖον νεοελληνικῆς μουσικῆς].
7. Μουσικὴ Ἐπιτροπὴ τοῦ Οἰκ. Πατρ. (1881), Στοιχειώδης διδασκαλία τῆς Ἐκκλησιαστικῆς Μουσικῆς - ἐκπονηθεῖσα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ψαλτηρίου, Κωνσταντινούπολις 1888 (ἀνατύπ. ἐκδ. Κουλτούρα).
8. Ἀρχιμ. Παγκρατίου Βατοπεδινοῦ, Ἡ Μουσικὴ Κλίμαξ, ἤτοι ἐπιστημονικὴ διαίρεσις τῆς μουσικῆς κλίμακος καὶ προσδιορισμὸς τοῦ μήκους τῶν χορδῶν αὐτῆς μετὰ μεγίστης μαθηματικῆς ἀκρίβειας, Κωνσταντινούπολη, 1917.
9. Δ. Γ. Παναγιωτόπουλου, Θεωρία καὶ Πράξις τῆς Βυζαντινῆς Ἐκκλησιαστικῆς Μουσικῆς, 1997, ἔκδ. "ΣΩΤΗΡ".
10. Μιχαὴλ Α. Χατζηαθανασίου, Αἱ Βάσεις τῆς Βυζαντινῆς Μουσικῆς, Κωνσταντινούπολη, 1948.
11. Χρυσάνθου τοῦ ἐκ Μαδύτων, Θεωρητικὸν Μέγα τῆς Μουσικῆς, Τεργέστη 1832 (ἀνατύπωσις ἐκδ. Κουλτούρα).
12. Σπ. Χ. Ψάχου, Ἡ Θεωρία τῆς Βυζαντινῆς Μουσικῆς στὴν Πράξη, ἐκδ. Νεκτ. Παναγόπουλος, 1997, σ. 173.
13. William H. Press, et. al, Numerical Recipes in C - The art of scientific computing, 2nd ed., Cambridge University Press, 1992 (reprinted 1996).

* * *



Ἂν βρεῖτε κανένα λάθος, ἢ γνωρίζετε ἄλλη σχετικὴ ἐργασία, παρακαλῶ εἰδοποιῆστε με.

α' πρόχειρη διαδικτυακὴ ἔκδοση: 22/6/2005 [pdf]
β' πρόχειρη διαδικτυακὴ ἔκδοση: 29/6/2005 [pdf]

02/04/2005 - 29/06/2005

panayiotis@analogion.net